Как было выше изложено, необходимо решить задачу деконволюции. Конволюция - операция свертки в цифровой обработке изображений. Свертка может быть как непрерывной, так и дискретной. В случае данной задачи используется операция дискретной свертки.[ [http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2010/REUPapers/Anand.pdf форумла 3.12](http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2010/REUPapers/Anand.pdf%20форумла%203.12)] :

Данная операция проиллюстрирована на изображении "Figure 25.2" в статье [Image Enhancement by Deconvolution]. Опираясь на данную информацию, можно операцию свертки привести к операции умножения матрицы на вектор, тогда задача будет переписана в следующем виде:

где - матрица свертки, полученная из ядра свертки .

Такое представление задачи изложено в [Variational Bayesian Blind Image Deconvolution, стр. 127]. Чтобы не вычислять операцию свертки можно перейти в частотную область преобразованием Фурье, так как операция свертки в такой области обозначает умножение. Затем будет необходимо применить обратное преобразование Фурье.

Прямое дискретное преобразование Фурье:

, k [<http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2010/REUPapers/Anand.pdf> (3.2)]

Обратное дискретное преобразование Фурье:  
 [<http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2010/REUPapers/Anand.pdf> (3.9)]

- количество значений сигнала

— измеренные значения сигнала (в дискретных временных точках с номерами которые являются входными данными для прямого преобразования и выходными для обратного;

комплексных амплитуд синусоидальных сигналов, слагающих исходный сигнал; являются выходными данными для прямого преобразования и входными для обратного; поскольку амплитуды комплексные, то по ним можно вычислить одновременно и амплитуду, и фазу;

— обычная (вещественная) амплитуда -го синусоидального сигнала;  
 — фаза -го синусоидального сигнала (аргумент комплексного числа);

— индекс частоты. Частота -го сигнала равна где — период времени, в течение которого брались входные данные. Введя необходимые обозначения для постановки задачи нужно перейти к ее решению.

Далее будут рассмотрены методы нахождения четкого изображения с известным ядром размытия с применением различных регуляризаторов. Поиск решения задачи можно переписать в вариационном виде:  
где

Термин вариационный означает, что некоторая величина, представляющая интерес, представлена как решение задачи оптимизации.

Решение задачи можно найти аналитически, вычислив градиент и приравняв его к нулю:

Из последнего равенства можно найти x:

Таким образом можно найти исходное изображение. Однако целевую функцию обычно дополняют «штрафующим» членом, помогающим ограничить абсолютные значения элементов вектора x. Постановка задачи оптимизации будет переписана следующим образом:

Вычислив градиент и приравняв к нулю, можно снова найти решение данной задачи:

Такое решение с регуляризацией представлено в [Least squares solutions to linear systems of equations]. Такой регуляризатор не избавляет фото от шума. Стоит рассмотреть регуляризацию по Соболеву: [<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00519521/document> , стр.9, Sobolev prior]

- дискретный градиент, то есть конечные разности соседних пикселей

Взяв градиент от можно получить решение:

))

Таким образом регуляризация по Соболеву должна штрафовать высокие частоты, благодаря использованию градиента. Такая регуляризация выполняет шумоподавления, однако может размывать края изображению. Существует регуляризация, которая может помочь с данной проблемой: регуляризация TV (Total variation). Представлена в [[*https://miplab.epfl.ch/pub/karahanoglu1101p.pdf*](https://miplab.epfl.ch/pub/karahanoglu1101p.pdf) стр. 2 ]. Дискретная версия:

- дискретная производная.

Такой регуляризатор является -нормой, в отличие от регуляризации Соболева. Главные эффекты TV - сглаживание однородных областей при сохранении граней.

Напротив -нормы, как например, Соболева норма стремятся к сглаживанию граней. Задачу можно переписать в следующем виде:

0

Решение задачи будет в виде:

Такой функционал TV не является гладкой функцией. Можно заменить абсолютное значение на гладкое абсолютное значение. Сглаженная TV-норма:

- параметр регуляризации.

Когда параметр близок к 0, то выражение становится близким к стандартному TV. Но когда становится большим - значение выражение становится близким к значению нормы Соболева, описанной выше. Такая априорная информация не является квадратичной, поэтому не может быть выражена в форме Фурье. Следовательно, решение по такой формуле можно сделать итерационным, шаг итерации можно представить так [<https://hal.inria.fr/inria-00070726/document> на стр. 21, формула 23] :

где дивергенция

Такой способ имеет название в "методах оптимизации" как градиентный спуск,

- шаг спуска,

Из вышеизложенного следует, что есть несколько способов решения проблемы. Для задачи необходимо выбрать ядро размытия, которое предполагается известным априори. Одно из решений - представить ядро Гауссовским. Способы построения Гауссова ядра размытия описаны в [[*https://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/gsmooth.htm*](https://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/gsmooth.htm)]. Такое ядро подчиняется двумерному Гауссовскому распределению:

Предположения о характере ядра свертки сделано, но необходимо также определить размер этого ядра. Его можно задать также произвольно, но есть и способ вычисления, который описан в [<https://blog.demofox.org/2015/08/19/gaussian-blur/>]. Это формула:

Однако, формула вычисления не является каким-либо решением задачи поиска размера ядра свёртки. Но она, возможно, поможет в каком-либо конкретном случае, где размытие фотографии был получен Гауссовым размытием. Для Гауссова размытия необходимо задавать случайный параметр . Но стоит отметить, что размытие фотографии далеко не всегда может быть Гауссовым, поэтому матрицу H можно выбирать и абсолютно случайную, не основываясь на ее априорном Гауссовом распределении.

Краткое сравнение предложенных методов регуляризации решения: (таблица)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Вид регуляризации** | **Дополнительные параметры** | **Тип алгоритма** | **Причина использования** |
| Обычная регуляризация |  | неитерационный | Простота использования |
| Регуляризация Соболева |  | неитерационный | Избавление от шума |
| Регуляризация TV |  | итерационный | Сохранение четких граней изображения |

*Таблица 1*

Как видно из *Таблицы 1*, у методов есть как преимущества, так и недостатки. Итерационные будут требовать больше параметров на входе, а также дольше производить вычисления ввиду нескольких шагов. Но причиной использования, например, итерационного TV-метода является сохранение более естественного первоначального облика изображения. Можно сделать вывод, что методы нуждаются в тестировании с разными ядрами размытия.

Подводя итоги вышеизложенного можно утверждать, что задача восстановления не является корректно поставленной, так как в ней неизвестных параметров больше известных. Способ, учитывающий наличие ядра свертки, упрощает задачу, так как решение ее находится аналитически. Однако и в этом случае, необходимо вводить регуляризацию, чтобы изображение получалось "красивым" для сфотографировавшего. Выбор правильного ядра свертки - также довольно непростая задача, так как природа его происхождения может быть совершенно разной. Для решения задачи деконволюции написанным в этой статье способом необходимо проводить различные тесты на разных изображениях, так как выбор ядра свертки, а также правильной функции с регуляризатором будет зависеть от конкретного случая.